

Funkcje rzeczywiste dowolnego kąta

mrg Chruścicka Agnieszka

We współczesnym nauczaniu matematyki trygonometria jest obecna tylko poprzez badanie funkcji trygonometrycznych w analizie matematycznej oraz przez stosunkowo proste zastosowanie w zadaniach geometrycznych.

Po ostatniej reformie szkolnictwa związki miarowe w trójkącie wprowadzane są dopiero w trzecim etapie kształcenia (tylko niektórzy nauczyciele podają je w gimnazjum), zatem większość uczniów spotyka się z trygonometrią dopiero w szkole średniej.

Część programów nauczania wprowadza tangens i cotangens kąta w trójkącie prostokątnym przed sinusem i cosinusem. Na wstępie nauczyciel powinien zwrócić uwagę uczniów na fakt, że słowem trygonometria określa się naukę dotyczącą związków miarowych boków i kątów w trójkącie oraz badaniem funkcji trygonometrycznych (trygos z greckiego kąt). Ważne jest także wskazanie przykładów pomiarów w terenie oraz w astronomii i geodezji, w których stosuje się trygonometrię. Po takim wprowadzeniu nauczyciel omawia definicję tangensa kąta ostrego, po czym wskazuje na rysunku stosunek odcinków odpowiadających tangensowi. W podobny sposób uczniowie poznają definicję cotangensa, po czym następują ćwiczenia polegające na budowaniu trójkąta prostokątnego o danym tg i ctg oraz obliczaniu przybliżonych wartości tych funkcji dla danego kąta przy pomocy kalkulatora. Uczniowie powinni wykonać tabelkę z wartościami, a następnie dokonać jej analizy i zauważyć pewne własności (np. $tg(90^\circ - \alpha) = ctg \alpha$). W podobny sposób wprowadzane są pojęcia sinusa i cosinusa, a całość problematyki zadaniowej dotyczącej tych zagadnień można podać następująco:

1. Obliczanie elementów trójkąta prostokątnego.
2. Obliczanie elementów figur płaskich zawierających trójkąt prostokątny.
3. Obliczanie pól powierzchni i objętości brył.
4. Rozwiązywanie zadań z innych dziedzin np. z fizyki.

W szkole średniej funkcje trygonometryczne określamy dwustopniowo, najpierw wprowadzamy funkcje trygonometryczne dowolnego kąta (kl.I), a następnie funkcje trygonometryczne liczby rzeczywistej, jako funkcje złożone (kl.III). Uczeń oczywiście nie słyszy nazwy "funkcja złożona", ale widzie jej konstrukcję. Zaznając uczniom z funkcjami zmiennej rzeczywistej, nauczyciel powinien zwrócić ich uwagę na fakt, że mamy do czynienia z dwoma rodzajami funkcji trygonometrycznych: funkcjami kąta skierowanego i funkcjami liczby, a co za tym idzie mamy dwa rodzaje równań i nierówności trygonometrycznych: te, w których niewiadomą jest kąt oraz te, w których niewiadoma oznacza liczbę.

Nie wszystkie z podanych w rozdziale pierwszym definicji nadają się do nauczania szkolnego, inne znajdują mniejsze lub większe zastosowanie w szkole. Do określeń o najmniejszej wartości dydaktycznej należą czysto analityczne określenia.

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta wprowadza się w oparciu o układ współrzędnych. Lekcja taka rozpoczyna się oczywiście od przypomnienia określenia funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. Następnie nauczyciel informuje uczniów, że będą rozpatrywać kąty, których wierzchołek znajduje się w początku układu współrzędnych, a początkowe ramię pokrywa się z dodatnią półosią OX i poleca narysować dowolny kąt tak położony. Potem uczniowie kierowani pytaniami prowadzącego, rysują prostopadłą do osi OX i z tak wyznaczonego trójkąta prostokątnego, znajdują wzory na szukane funkcje, po czym mają wykorzystać położenie kąta w układzie współrzędnych. Wyniki pracy uczniów można zebrać w tabeli:

α	0^0	60^0	120^0	180^0	240^0	270^0	300^0	360^0
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$tg \alpha$								
$ctg \alpha$								

Teraz powinna nastąpić seria pytań nauczyciela typu: Jaka jest wartość cosinusa, gdy końcowe ramię kąta zawiera się w trzeciej ćwiartce? Co decyduje o wartości sinusa?,... . Wyniki dyskusji można zilustrować tabelą:

	I	II	III	IV
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$tg \alpha$				
$ctg \alpha$				

Lekcję można zakończyć wierszykiem, który podsumuje i utrwali tabelkę, a który każdy licealista dobrze zna: "w pierwszej wszystkie są dodatnie, w drugiej tylko sinus,...".

Zadania utrwalające takie wprowadzenie powinny polegać na:

1. Odczytywaniu przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych danych kątów w układzie współrzędnych (papier milimetrowy).
2. Redukcji do pierwszej ćwiartki na podstawie wzorów dla $n \cdot 360^0 + \alpha$.
3. Obliczanie dwóch funkcji, gdy dana jest trzecia.
4. Sprawdzenie, czy $\sin \alpha$ ($\cos \alpha$) może się równać $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{\cos \alpha}$,

Koncepcja układu współrzędnych jest jednym z kilku sposobów definiowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta (inne to m.in. prostokątny rzut wektora na oś, koło trygonometryczne), ma on jednak największą wartość dydaktyczną.

Więcej...

1. W. Bartoń, Matematyka się liczy, liceum ogólnokształcące i profilowane, technikum – poradnik dla nauczyciela, WSiP, Warszawa 2002.
2. A. Efrenfeucht, Nauczanie matematyki w klasie III liceum, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1973.
3. A. Efrenfeucht, O. Stande, Algebra. Liczby i funkcje, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1976.
4. F. Ferdek, Jak wprowadzam pojęcia i sposoby obliczania wartości sinus i cosinus, Matematyka 2/1996.
5. J. Kaja, Matematyka III – podręcznik dla klasy trzeciej liceum i technikum, WSiP, Warszawa 1997.
6. S. Kartasiński, Nauczanie trygonometrii, Państwowe Zakłady wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1960.
7. A. Wojciechowska, Podzwonne dla trygonometrii, Matematyka 4/1997.
8. Program nauczania dla szkoły średniej – matematyka, DKO-4015-3/96.